Groupe A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans ce problème, **C** désigne le plan complexe; on l'identifie au plan réel $\mathbf{R}^2$ au moyen de l'application qui au couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ associe $z = x + iy \in \mathbf{C}$. On note D le disque unité ouvert $|z| < 1$, U le cercle unité $|z| = 1$, et D le disque unité fermé $|z| \leqslant 1$. Si f est une fonction numérique sur $\overline{D}$, on pose :

$$\iint_D f(z)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta \right) rdr$$

chaque fois que les intégrales du deuxième membre ont un sens.

I

1° Soient $\alpha > -1$ un nombre réel, et n un entier positif.

Calculer

$$C_{n,\alpha} = \iint_D |z|^{2(n+\alpha)}\,dx\,dy .$$

2° Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \bar{z}'^n}{C_{n,\alpha}}$ converge pour $|zz'| < 1$ et que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ elle converge uniformément pour $|z'| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1 - \varepsilon$. Calculer la somme $B_\alpha(z, z')$ de cette série.

3° Soient P (z) une fonction polynomiale de z (i. e. il existe un nombre entier N et une suite de nombres complexes (p_k), $0 \leqslant k \leqslant N$, tels que $P(z) = \sum_0^N p_k z^k$).

Montrer qu'on a

$$\iint_D B_\alpha(z, z')\,P(z')\,|z'|^{2\alpha}\,dx'\,dy' = P(z) \quad \text{pour tout } z \in D .$$

II

1° Soit f une fonction complexe sur $\overline{D}$. On suppose que f satisfait à la condition suivante :

(H) (*i*) f est continue sur $\overline{D}$.

(*ii*) Il existe une série entière $\sum_0^\infty a_n z^n$ convergente pour $|z| < 1$, telle que $f(z) = \Sigma\, a_n z^n$ pour $|z| < 1$.

Montrer que f est limite uniforme dans $\overline{D}$ d'une suite de polynômes.

2° On suppose que f satisfait à la condition (H). Montrer qu'on a :

(*) $f(z) = \iint_D B_\alpha(z, z')\,f(z')\,|z'|^{2\alpha}\,dx'\,dy'$ pour tout $z \in D$.

3° Existe-t-il d'autres fonctions $B'(z, z')$ telles que l'égalité (*) soit encore vraie lorsqu'on y substitue B' à B_α, pour toute f satisfaisant à (H)? En existe-t-il d'autres qui jouissent en outre de la propriété suivante : pour tout $z \in D$ il existe une série entière $\sum_0^\infty b_n T^n$, uniformément convergente pour $|T| \leqslant 1$, telle que $B'(z, z') = \sum_0^\infty b_n \bar{z}'^n$ pour $|z'| \leqslant 1$?

III

Soit $a \in \mathbf{C}$. On note F_a la transformation homographique

$$F_a(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} .$$

1° Pour quelles valeurs de a, F_a est-elle constante? Dans toute la suite de III on suppose les transformations $F_a, F_b \ldots$ non constantes.

. . . / . . .

E.N.S. ULM & SEVRES

1976

2° Montrer qu'on a $F_{-a}(F_a(z)) = z$.

Montrer qu'on a $|F_a(z)| < 1$ si $|a| < 1$ et $|z| < 1$, et que $|F_a(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

3° Soit $u \in U$; montrer qu'on a $uF_a(z) = F_{ua}(uz)$. Montrer qu'on a sous certaines conditions $F_a(F_b(z)) = F_c(vz)$ où c est un nombre complexe, et v un nombre de module 1, et exprimer c et v en fonction de a et b.

Quel est l'ensemble parcouru par v lorsque a et b parcourent D?

4° Les transformations F_a, $a \in D$, engendrent un groupe G de transformations de D. Montrer que toute transformation $F \in G$ s'écrit, d'une seule façon, $F(z) = F_a(uz)$ avec $a \in D$, $u \in U$.

Montrer qu'inversement pour tout $a \in D$ et tout $u \in U$, la transformation $z \longmapsto F_a(uz)$ appartient à G.

5° Soit $a \in U$. Montrer que les transformations $F_{\lambda a}$, lorsque λ parcourt l'intervalle réel $]-1, +1[$, forment un sous-groupe Γ_a de G.

Peut-on trouver une fonction différentiable $\varphi : \mathbf{R} \to]-1, +1[$, telle que l'application $x \longmapsto F_{\varphi(x)\,a}$ soit un isomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$ sur Γ_a?

IV

1° Pour toute fraction rationnelle $F(T) = \dfrac{aT + b}{cT + d}$, $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ on pose $F'(T) = \dfrac{(ad - bc)}{(cT + d)^2}$. Soit F une transformation du groupe G (introduit au n° III-4°).

Montrer que le quotient $\dfrac{B_0(F(z), F(z'))}{B_0(z, z')}$ s'exprime simplement en fonction de $F'(z)$, $F'(z')$.

2° Soit $k(z)$ une fonction numérique sur D, somme d'une série entière $\sum_0^\infty k_n z^n$ convergente dans D.

Montrer que si $k(z)$ ne dépend que de $|z|$, k est constante.

3° Soit $K(z, z')$ une fonction numérique sur $D \times D$ telle que $K(F(z), F(z'))$ et $K(z, z')$ satisfassent la même relation que celle trouvée pour B_0 au numéro 1, pour toute transformation $F \in G$. On suppose en outre vérifiée la condition suivante :

(H′) Il existe une série entière $\sum_0^\infty k_n z^n$ convergente pour $|z| < 1$, telle que $K(z, 0) = \sum_0^\infty k_n z^n$ pour $|z| < 1$.

Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que $K = \lambda B_0$.

4° La conclusion du numéro 3 est-elle encore vraie si on n'impose pas à K de satisfaire à la condition (H′) ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail